# XLIX Olimpiada Matemática Española

## Fase Local
## Melilla 14 de enero de 2013

### Problema 1

Escribimos en fila, pero no necesariamente en orden, los números enteros desde el **1** al **2013**. Calculamos las medias de cada dos números consecutivos en dicha fila y, después, sumamos todas esas medias. ¿Cuál es el mayor resultado que se puede obtener? ¿Y el menor?

### Problema 2

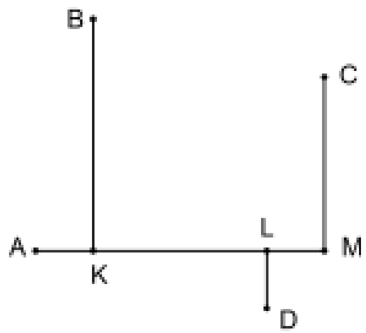
Dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios diferentes **r** y **R**. Hallar el área del triángulo que forman sus tres rectas tangentes comunes en función de **r** y **R**.

### Problema 3

Probar que si $\mathbf{x \geq 2}$, $\mathbf{y \geq 2}$ y $\mathbf{z \geq 2}$ se cumple que $\mathbf{(x^3 + y)(y^3 + z)(z^3 + x) \geq 125xyz}$

### Problema 4

En el segmento **AM** se toman los puntos **K** y **L** de modo que **AK = LM**. Situemos dos puntos **B** y **C** a un lado del segmento **AM** y un punto **D** hacia el otro lado, de modo que **BK = KM**, **CM = KL** y **DL = LM**, siendo además las rectas **BK**, **CM** y **DL** perpendiculares las tres a la recta **AM**. Prueba que **ABCD** es un cuadrado.




**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de esta sesión es de 3,5 horas.**

# XLIX Olimpiada Matemática Española

## Fase Local
## Melilla 14 de enero de 2013

### Problema 5

¿Cuál es el mayor número de **2013** cifras que suman exactamente **2013**? ¿Y el menor?

### Problema 6

Sean **ABCD** es un cuadrilátero cualquiera y **P** y **Q** los puntos medios de sus diagonales **BD** y **AC**, respectivamente. Las paralelas por **P** y **Q** a la otra diagonal se cortan en **O**. Si unimos **O** con los cuatro puntos medios **X**, **Y**, **Z** y **T** de los lados del cuadrilátero, se forman cuatro cuadriláteros **OXBY**, **OYCZ**, **OZDT** y **OTAX**. Prueba que estos cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

### Problema 7

Probar que el enorme número $\mathbf{5^{2013} + 3^{4026}}$ es un múltiplo de **14**.

### Problema 8

Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen lo mismo.

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de esta sesión es de 3,5 horas.**

# XLIX Olimpiada Matemática Española

## Fase Local
## Melilla 14 de enero de 2013

# SOLUCIONES

## Solución Problema 1

Sea la fila formada por los números desde el **1** hasta el **2013** en algún orden:

$$\mathbf{a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ \ldots\ a_{2012}\ \text{y}\ a_{2013}}$$

Calculamos todas las medias de cada dos números consecutivos de esta fila:

$$\mathbf{\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{a_2+a_3}{2},\ \frac{a_3+a_4}{2},\ \ldots\ \ldots\ \frac{a_{2011}+a_{2012}}{2}\ \text{y}\ \frac{a_{2012}+a_{2013}}{2}}$$

Y ahora, al sumar, vemos que todos los números de la lista inicial, salvo el primero y el último, aparecen dos veces semisumados con otro consecutivo, es decir, todos los números hay que sumarlos una vez salvo el primero y el último de los que se suma sólo su mitad. Por tanto, si queremos la suma:

- Mayor: los de los extremos han de ser lo más pequeños posibles, esto es, **1** y **2**.

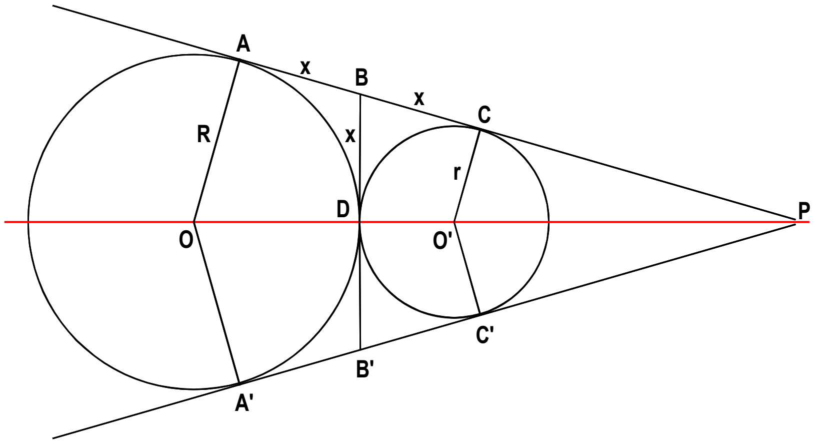
La suma mayor será, pues: $\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\sum_{k=3}^{2013}k=1{,}5+\frac{2016\cdot 2011}{2}=\underline{2027089{,}5}}$

- Menor: los de los extremos han de ser lo más grandes posibles, esto es, **2012** y **2013**.

La suma menor será, pues: $\mathbf{\sum_{k=1}^{2011}k+\frac{2012}{2}+\frac{2013}{2}=\frac{2012\cdot 2011}{2}+2012.5=\underline{2025078{,}5}}$

## Solución Problema 2

Dibujemos la situación:




Trabajemos en la mitad superior.

Como las tangentes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior generan segmentos de igual longitud: $\mathbf{AB = BD = BC = x}$

Se pide $\mathbf{S_{BB'P} = 2S_{BDP} = x \cdot (r + O'P)}$

Como los triángulos **BDP** y **O'CP** son semejantes: $\mathbf{\frac{x + CP}{x} = \frac{O'P}{r}}$

Y de aquí: $\mathbf{x = \frac{r \cdot CP}{O'P - r}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{r \cdot \sqrt{O'P^2 - r^2}}{O'P - r} = r \cdot \sqrt{\frac{O'P + r}{O'P - r}}}$

## Solución Problema 3

Operando: $(x^3+y)(y^3+z)(z^3+x)=(xyz)^3+x^3z^4+y^3x^4+z^3y^4+x^4z+y^4x+z^4y+xyz$

Y acotando los distintos sumandos tenemos:

- El primero $(xyz)^3=(xyz)^2(xyz)\geq 8^2(xyz)=64xyz$
- Los segundos (por la desigualdad de la MA-MG):

  $$x^3z^4+y^3x^4+z^3y^4\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^7y^7z^7}=3\cdot(xyz)^{4/3}(xyz)\geq 3\cdot 8^{4/3}(xyz)=48xyz$$

- Análogamente, los terceros:

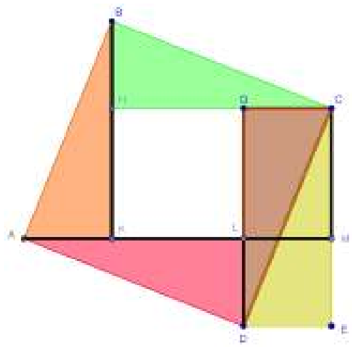
  $$x^4z+y^4x+z^4y\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^5y^5z^5}=3\cdot(xyz)^{2/3}(xyz)\geq 3\cdot 8^{2/3}(xyz)=12xyz$$

- Y el último: $xyz=xyz$

Sumando todo, tenemos lo pedido: $(x^3+y)(y^3+z)(z^3+x)\geq(64+48+12+1)xyz=125xyz$

## Solución Problema 4

Todos los triángulos rectángulos coloreados son iguales, luego los lados del cuadrilátero, hipotenusas de estos triángulos, son iguales. Los ángulos del cuadrilátero son rectos por ser la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.



## Solución Problema 5

Como $2013=223\cdot 9+6$, el mayor será:

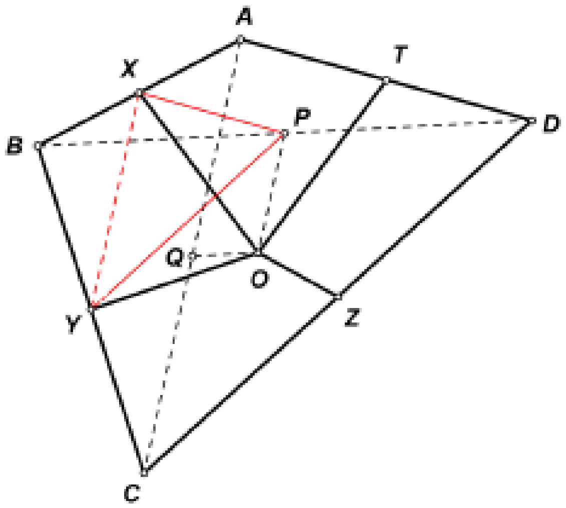
| *223 veces* | *Una vez* | *1789 veces* |
|---|---|---|
| **999… …999** | **6** | **000……000** |

Y el menor:

| *Una vez* | *1788 veces* | *Una vez* | *223 veces* |
|---|---|---|---|
| **1** | **000……000** | **5** | **999… …999** |

## Solución Problema 6

Dibujamos la situación con detalle:




Como **OP** es paralelo a **AC**, los triángulos **OXY** y **PXY** tienen la misma base y altura, y por tanto la misma área. De ahí resulta (añadiendo el triángulo **BXY**) que los cuadriláteros **OXBY** y **PXBY** también tienen la misma área. Pero el área del cuadrilátero **PXBY** es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial **ABCD** al ser semejantes con razón **2** del grande al pequeño.

Y análogamente se pueden ver los demás casos.

## Solución Problema 7

Sin aplicar congruencias: claramente $5^{2013}+3^{4026}$ es suma de dos números impares, por tanto, múltiplo de **2**. Falta saber si esa suma es también múltiplo de **7**.

Por ejemplo, sabiendo que $3^4=81=\overset{*}{7}+4$ y que $5^2=25=\overset{*}{7}+4$, y aplicando el Binomio de Newton se puede ver que sí:

$$5^{2013}+3^{4026}=5\cdot(5^2)^{1006}+3^2\cdot(3^4)^{1006}=5\cdot\left(4+\overset{*}{7}\right)^{1006}+9\cdot\left(4+\overset{*}{7}\right)^{1006}=$$

$$=(5+9)\cdot 4^{1006}+\overset{*}{7}=14\cdot 4^{1006}+\overset{*}{7}=\overset{*}{7}$$

**Solución Problema 8**

Sean $r, s$ y $t$ las raíces, reales o complejas, del polinomio $p(x)$

y sea $S_n$ la suma de sus $n$−ésimas potencias, esto es, $S_n = r^n + s^n + t^n$. Por un lado, teniendo en cuenta las fórmulas de Cardano-Vièta resulta que $S_1 = r + s + t = -2$, $rs + st + tr = 3$ y $rst = -4$ lo que nos permite calcular $S_2$. En efecto,

$$S_2 = r^2 + s^2 + t^2 = (r + s + t)^2 - 2(rs + st + tr) = -2$$

Y por otro lado:

$$\begin{array}{rcl} p(r) = r^3 + 2r^2 + 3r + 4 = 0 & \to & r^3 = -2r^2 - 3r - 4 \\ p(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0 & \to & s^3 = -2s^2 - 3s - 4 \\ p(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4 = 0 & \to & t^3 = -2t^2 - 3t - 4 \end{array}$$

Sumando las expresiones anteriores, resulta

$$S_3 = r^3 + s^3 + t^3 = -2S_2 - 3S_1 - 12 = -2$$

quedando probado que las sumas de las tres primeras potencias de las raíces del polinomio $p(x)$ valen lo mismo: $s_1 = S_2 = S_3 = -2$.