XLIX Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 14 de enero de 2013

Problema 1

Escribimos en fila, pero no necesariamente en orden, los números enteros desde el **1** al **2013**. Calculamos las medias de cada dos números consecutivos en dicha fila y, después, sumamos todas esas medias. ¿Cuál es el mayor resultado que se puede obtener? ¿Y el menor?

Problema 2

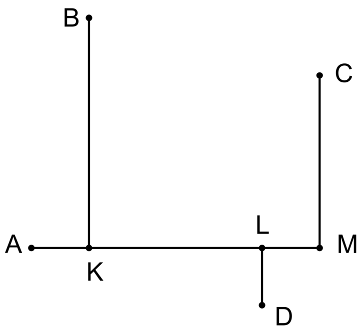
Dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios diferentes **r** y **R**. Hallar el área del triángulo que forman sus tres rectas tangentes comunes en función de **r** y **R**.

Problema 3

Demuestra que las dos raíces de la ecuación cuadrática $\mathbf{x^2+x+1=0}$ también cumplen esta otra ecuación: $\mathbf{x^{2012}+x^{2013}+x^{2014}=0}$

Problema 4

En el segmento **AM** se toman los puntos **K** y **L** de modo que **AK** = **LM**. Situemos dos puntos **B** y **C** a un lado del segmento **AM** y un punto **D** hacia el otro lado, de modo que **BK** = **KM**, **CM** = **KL** y **DL** = **LM**, siendo además las rectas **BK**, **CM** y **DL** perpendiculares las tres a la recta **AM**. Prueba que **ABCD** es un cuadrado.



No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de esta sesión es de 3,5 horas.

XLIX Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 14 de enero de 2013

Problema 5

¿Cuál es el mayor número de **2013** cifras que suman exactamente **2013**? ¿Y el menor?

Problema 6

Sean **ABCD** es un cuadrilátero cualquiera y **P** y **Q** los puntos medios de sus diagonales **BD** y **AC**, respectivamente. Las paralelas por **P** y **Q** a la otra diagonal se cortan en **O**. Si unimos **O** con los cuatro puntos medios **X**, **Y**, **Z** y **T** de los lados del cuadrilátero, se forman cuatro cuadriláteros **OXBY**, **OYCZ**, **OZDT** y **OTAX**. Prueba que estos cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

Problema 7

Si **x** e **y** son números reales, $\mathbf{0 < p}$, $\mathbf{0 < q}$ y $\mathbf{p + q < 1}$, probar que $\mathbf{(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2}$

Problema 8

Sea **P** un punto arbitrario de una circunferencia ***C*** y sean **AB** y **CD** dos de sus diámetros. Y sean **R** y **S** los pies de las perpendiculares trazadas desde **P** sobre **AB** y **CD** respectivamente. Probar que **RS** es independiente de la elección del punto **P**.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de esta sesión es de 3,5 horas.

XLIX Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 14 de enero de 2013

SOLUCIONES

Solución Problema 1

Sea la fila formada por los números desde el **1** hasta el **2013** en algún orden:

$$\mathbf{a_1}\ ,\ \mathbf{a_2}\ ,\ \mathbf{a_3}\ \dots\dots\ \mathbf{a_{2012}}\ \text{y}\ \mathbf{a_{2013}}$$

Calculamos todas las medias de cada dos números consecutivos de esta fila:

$$\frac{a_1+a_2}{2}\ ,\ \frac{a_2+a_3}{2}\ ,\ \frac{a_3+a_4}{2}\ ,\dots\dots\ \frac{a_{2011}+a_{2012}}{2}\ \text{ y }\ \frac{a_{2012}+a_{2013}}{2}$$

Y ahora, al sumar, vemos que todos los números de la lista inicial, salvo el primero y el último, aparecen dos veces semisumados con otro consecutivo, es decir, todos los números hay que sumarlos una vez salvo el primero y el último de los que se suma sólo su mitad. Por tanto, si queremos la suma:

- Mayor: los de los extremos han de ser lo más pequeños posibles, esto es, **1** y **2**.

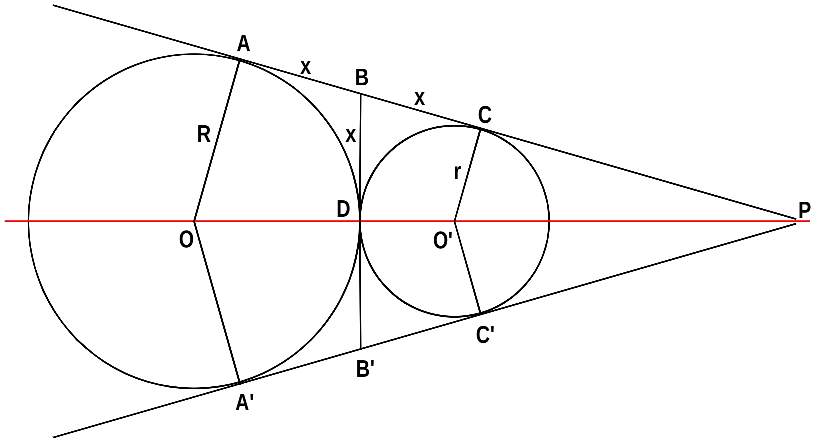
La suma mayor será, pues: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\sum_{k=3}^{2013} k = 1{,}5+\frac{2016\cdot 2011}{2}=\underline{2027089{,}5}$

- Menor: los de los extremos han de ser lo más grandes posibles, esto es, **2012** y **2013**.

La suma menor será, pues: $\sum_{k=1}^{2011} k+\frac{2012}{2}+\frac{2013}{2}=\frac{2012\cdot 2011}{2}+2012.5=\underline{2025078{,}5}$

Solución Problema 2

Dibujemos la situación:



Trabajemos en la mitad superior.

Como las tangentes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior generan segmentos de igual longitud: $\mathbf{AB = BD = BC = x}$

Se pide $\mathbf{S_{BB'P} = 2S_{BDP} = x \cdot (r + O'P)}$

Como los triángulos **BDP** y **O'CP** son semejantes: $\mathbf{\dfrac{x + CP}{x} = \dfrac{O'P}{r}}$

Y de aquí: $\mathbf{x = \dfrac{r \cdot CP}{O'P - r}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = \dfrac{r \cdot \sqrt{O'P^2 - r^2}}{O'P - r} = r \cdot \sqrt{\dfrac{O'P + r}{O'P - r}}}$

Solución Problema 3

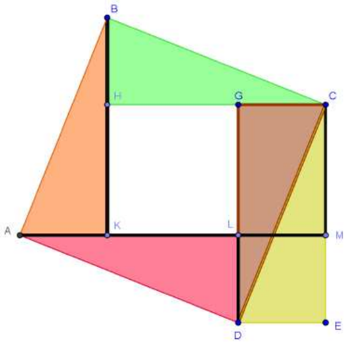
No es preciso resolver la ecuación cuadrática inicial.

Como $\mathbf{x^2+x+1=0 \quad \rightarrow \quad (x^2+x+1)(x-1)=0 \quad \rightarrow \quad x^3-1=0 \quad \rightarrow \quad x^3=1}$

Y así: $\mathbf{x^{2012}+x^{2013}+x^{2014}=(x^3)^{670}x^2+(x^3)^{671}+(x^3)^{671}x=x^2+1+x=0}$

Solución Problema 4

Todos los triángulos rectángulos coloreados son iguales, luego los lados del cuadrilátero, hipotenusas de estos triángulos, son iguales. Los ángulos del cuadrilátero son rectos por ser la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.



Solución Problema 5

Como $\mathbf{2013=223\cdot 9+6}$, el mayor será:

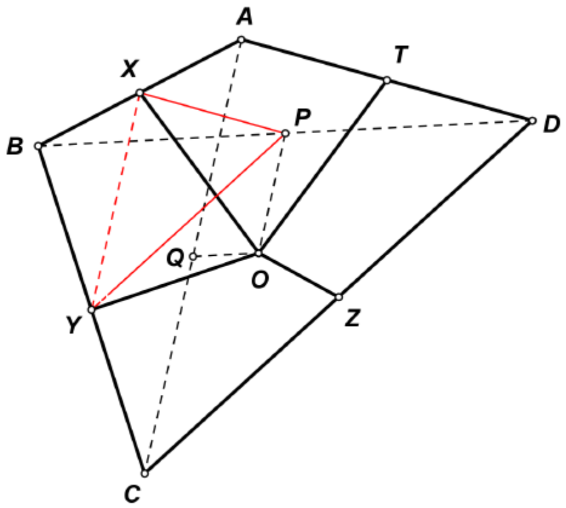
223 veces	*Una vez*	*1789 veces*
999… …999	**6**	**000……000**

Y el menor:

Una vez	*1788 veces*	*Una vez*	*223 veces*
1	**000……000**	**5**	**999… …999**

Solución Problema 6

Dibujamos la situación con detalle:



Como **OP** es paralelo a **AC**, los triángulos **OXY** y **PXY** tienen la misma base y altura, y por tanto la misma área. De ahí resulta (añadiendo el triángulo **BXY**) que los cuadriláteros **OXBY** y **PXBY** también tienen la misma área. Pero el área del cuadrilátero **PXBY** es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial **ABCD** al ser semejantes con razón **2** del grande al pequeño.

Y análogamente se pueden ver los demás casos.

Solución Problema 7

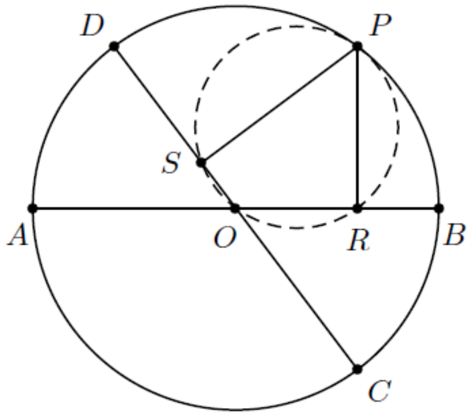
Claramente si $\mathbf{x = y = 0}$ se cumple la igualdad. Veamos que, en el caso en que **x** e **y** no sean nulos, se da la desigualdad estricta por la reversibilidad de todos estos pasos:

$$(px+qy)^2 \le px^2+qy^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(px+qy)^2}{px^2+qy^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2x^2+2pqxy+q^2y^2}{px^2+qy^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow$$

y dividiendo $\quad p+q-\dfrac{pq(x-y)^2}{px^2+qy^2} \le p+q < 1$

Solución Problema 8

Dibujemos la situación con detalle:



Llamemos **O** al centro de la circunferencia ***C***. El cuadrilátero **PROS** es circunscribible, pues tiene dos ángulos opuestos rectos, y lo es a una circunferencia ***C'*** de diametro **OP**, igual que el radio de ***C***.

RS es una cuerda de esa circunferencia y mide siempre lo mismo pues el ángulo **BOD** inscrito es siempre el mismo, independiente de **P**. *(Todas las cuerdas de una circunferencia vistas desde un mismo ángulo inscrito miden lo mismo)*